1er Cuatrimestre 2023

1er Parcial (03/05/2023)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Libreta Universitaria:

Total de hojas entregadas (sin enunciado): 4

Ej. 1 19	Ej. 2 28	Ej. 3 20	Ej. 4 24	Nota 91/100

- ☐ El examen se aprueba con 60 puntos.
- ☐ Resolver los ejercicios en hojas separadas.
- ☐ Completar nombre en las hojas.
- ☐ Completar LU y nombre en el enunciado.

Justificar todas las respuestas
Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.

Ejercicio 1.

Sea A en $\mathbb{R}^{n\times n}$, llamamos *matriz trasponedora de* A [1] a una matriz B tal que $AB = A^t$.

a) (4 puntos) ¿Es cierto que toda matriz trasponedora tiene determinante 1? Justifique.

b) (8 puntos) Dada una matriz A, ¿cuántas matrices trasponedoras puede tener? Justifique.

c) (12 puntos) Demostrar que si A es inversible y antidiagonal [2] entonces B es diagonal, y caracterizarla.

Ejercicio 2.

Si $A = LU$ es una descomposición LU de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con L diagonal dominante.

a) (12 puntos) Probar que $|a_{ij}| \leqslant \sum_{k=1}^{i} |u_{kj}| \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$.

b) (12 puntos) Probar que $\|fila_i(A)\|_1 \leqslant i\|U\|_\infty \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

c) (4 puntos) Probar que $||A||_\infty \leqslant n||U||_\infty$.

Ejercicio 3.

a) (5 puntos) Demostrar que la matriz simétrica M es definida positiva, siendo M:

$$M = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) (15 puntos) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, los *índices de perfil* de A se definen como $m(A, i) = \min\{j : a_{ij} \neq 0\}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Por ejemplo, los índices de perfil de M son $m(M, 1) = 1$, $m(M, 2) = 2$, $m(M, 3) = 2$ y $m(M, 4) = 4$. Probar que si $A = LL^t$ es la factorización de Cholesky de A, entonces L tiene el mismo perfil que A, es decir, $m(A, i) = m(L, i) \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Ejercicio 4.

Considere las siguientes matrices: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $U \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$ tales que:

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

a) (8 puntos) ¿Qué condiciones deben cumplir A, B y C para que U sea ortogonal?

b) (7 puntos) Dar la descomposición QR de U suponiendo conocidas las de A y C.

c) (13 puntos) Fijando $n = m = 2$, A a una matriz de Givens que manda el $(4, 3)$ al $(5, 0)$ y C a una matriz de Givens que rota en sentido antihorario sobre un ángulo recto, explicitar las matrices A y C y listar las matrices de Householder necesarias para triangular U.

[1] El nombre *trasponedora* no pertenece al vocabulario del área, sino que existe sólo a efectos de este examen.
[2] Una matriz antidiagonal tiene ceros fuera de la diagonal que arranca en $(A)_{n1}$ y termina en $(A)_{1n}$.

03/05/2023
HOJA 1

1) a) Si B es traspuesta de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $AB = A^t \Rightarrow \det(AB) = \det(A^t)$.
Sabemos que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ y $\det(A^t) = \det(A) \Rightarrow \det(A)[\det(B) - 1] = 0$.
Entonces, $\det(A) = 0 \vee \det(B) = 1$. No necesariamente ocurre lo segundo si A es no inversible.
Por ejemplo, cualquier matriz por la matriz $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cumple $\mathbb{O}B = \mathbb{O} = \mathbb{O}^t$ y B no necesariamente cumple $\det(B) = 1$. → ¿ENTONCES ES CIERTO O NO LO ENUNCIADO?

b) Sin embargo, si A es inversible, $\det(A) \neq 0$ por lo que $\det(B) = 1$. Más aún, ~~...~~ ~~...~~ tomando $B = A^{-1}A^t$ vale $AB = (AA^{-1})A^t = IA^t = A^t$. Y ahora veamos que es única:
Si existen $B, B' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ / $AB = AB' = A^t$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es inversible, entonces al multiplicar por A^{-1}:
$A^{-1}AB = A^{-1}AB' \Rightarrow IB = IB' \Rightarrow B = B'$. Entonces, B es única.
Pero vimos que no es así para matrices no inversibles, pues la nula tiene infinitas matrices traspuestas. Y tenemos ejemplo de matriz no "traspuesible" con $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pues ~~su traspuesta es~~ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$. NO, SU TRASPUESTA ES $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Ahora, las cantidades posibles son $0, 1, \infty$. No puede haber una cantidad intermedia.
Caso contrario, supongamos $AB = AB' = A^t$ con $B \neq B'$. FALTA DECIR CUANDO UNA MATRIZ NO TIENE TRASPUESTA, O TIENE MÁS DE 1, 2
Vale que $\frac{AB + AB'}{2} = \frac{2A^t}{2} = A^t \Rightarrow A\left(\frac{B+B'}{2}\right) = A^t$, y esta operación de ir sacando el promedio la podemos seguir aplicando tantas veces como queramos, es mayor que k, $\forall k \in \mathbb{N}$ y por ende decimos que es infinita.

c) Sea $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ antidiagonal. Entonces, si $M' = \begin{pmatrix} m_{n1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{1n} \end{pmatrix}$ (cambiando orden de filas)
vale que $\det(M) = (-1)^n \det(M')$
Por lo que M es inversible $\Leftrightarrow M'$ es inversible $\Leftrightarrow m_{1n} \neq 0, \dots, m_{n1} \neq 0$.
Además, ~~...~~ sabemos que $M'^{-1} = \begin{pmatrix} m_{n1}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{1n}^{-1} \end{pmatrix}$ y como se llega de M a M' con
SIGUE

La matriz de permutación $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$, que cumple $P^2 = I$, es decir $P = P^{-1}$, vale.

$$M' = PM \Leftrightarrow M'^{-1} = (PM)^{-1} = M^{-1}P$$

Luego M^{-1} es M'^{-1} con el orden de ~~filas~~ columnas intercambiado, es decir:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & m^{-1}_{n1} \\ & ⋰ & \\ m^{-1}_{1n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ es antidiagonal.}$$

Por otra parte, M antidiagonal $\Rightarrow M^t$ antidiagonal pues los elementos se mantienen en su diagonal al hacer transpuesta, y los no nulos son los de la diagonal $i+j = n+1$.

Nos falta ver que si M, N son antidiagonales ($M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$) entonces MN es diagonal. En efecto:

$$(MN)_{ij} \underset{(\text{con } i\neq j)}{=} \sum_{k=1}^{n} M_{ik}N_{kj} = M_{i,n+1-i}N_{n+1-i,j}$$ (pues si los subíndices no suman $n+1$, se anulan).

El único caso de $M_{ik} \neq 0$ es $k = n+1-i$, pero entonces debe ser $(n+1-i)+j = n+1 \Rightarrow i=j$, absurdo.

En rigor no acaba el razonamiento, sería correcto decir que como $i \neq j$ → $M_{i,n+1-i} \cdot N_{n+1-i,j} = 0$.

Luego, fuera de la diagonal de MN hay ceros. $\Rightarrow MN$ es diagonal.

Yendo al problema, en la parte B dijimos que $B = A^{-1}A^t$ pues A es invertible.

Como A es antidiagonal, A^t, A^{-1} lo son, y $B = A^{-1}A^t$ es diagonal.

Además: $$A^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a^{-1}_{n1} \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ a^{-1}_{1n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1}_{n1}a_{1n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a^{-1}_{1n}a_{n1} \end{pmatrix}$$

con lo que B queda caracterizada: $b_{ii} = a^{-1}_{n+1-i,i}\, a_{i,n+1-i}$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

y si $i \neq j$, $b_{ij} = 0$.

¡Bien!

03/05/2023
Hoja 2

2) a) Como $A=LU$, $a_{ij}=\sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj}$, donde a_{ij}, l_{ij}, u_{ij} son los elementos de A, L, U respectivamente, en la posición (i,j), $\forall 1\leq i,j\leq n$. ✓

$\Rightarrow$ Aplicando módulo y usando desigualdad triangular: $|a_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|l_{ik}||u_{kj}|$.

Como L es triangular inferior y L es triangular superior, puedo cambiar n por i en la sumatoria, pues luego se sumarían ceros: $|a_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{i}|l_{ik}||u_{kj}|$ ✓

Como L es diagonal dominante y triangular inferior: $|l_{ii}| \geq \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|l_{ik}| = \sum_{k=1}^{i-1}|l_{ik}|$ ✓

~~$\Rightarrow$~~ Pero como L tiene unos en su diagonal: $|l_{ii}|=1$ $\forall 1\leq i\leq n$, esto es por la factorización LU. Luego $\sum_{k=1}^{i-1}|l_{ik}|\leq 1 \Rightarrow |l_{ik}|\leq 1$ $\forall 1\leq k\leq i$ y podemos acotar por 1:

i-1) dos? dos?

$|a_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{i} 1\cdot|u_{kj}| = \sum_{k=1}^{i}|u_{kj}|$ ▨ B

b) Por definición de norma 1: $\|Fila_i(A)\|_1 = \sum_{j=1}^{n}|Fila_i(A)_j| = \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ (usamos que el vector fila contiene a los elementos de A de la i-ésima fila).

j=1? j?

Por la parte a), $\|Fila_i(A)\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}|u_{kj}|$. Es claro que vale $|u_{kj}| \leq \max_{1\leq r\leq i}|u_{rj}|$ para todo $1\leq k\leq i$, luego $\|Fila_i(A)\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\max_{1\leq r\leq i}|u_{rj}| = i\max_{1\leq r\leq i}\sum_{j=1}^{n}|u_{rj}|$ donde lo que hicimos fue sacar un i porque en la 2° sumatoria estábamos sumando i veces lo mismo, y reorganizar el max y la otra sumatoria convenientemente.

no

Pero sabemos, pues lo probamos en la guía, que $\|U\|_\infty = \max_{1\leq r\leq n}\sum_{j=1}^{n}|u_{rj}|$, y como U es triangular superior, podemos cambiar el $\max_{1\leq r\leq i}$ por $\max_{1\leq r\leq n}$ y llegar a:

no puede ser esto

$\|Fila_i(A)\|_1 \leq i\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|u_{rj}| = i\|U\|_\infty$ ▨ B

SIGUE

c) $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ por lo mismo de antes, y ahora por la parte b):

$$\|A\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \|\text{fila}_i(A)\|_2 \le \max_{1\le i\le n} i\|U\|_{\max} = n\|U\|_{\max}$$

en tanto es trivial que $\max_{1\le i\le n} i = n$. ▨

B

03/05/2023

Hoja 3

3) a) Observamos que M es simétrica, luego para demostrar que es definida positiva, basta probar que los determinantes de sus submatrices principales son positivos, por lo visto en la práctica.
La puedo usar esta.

* $\det([9]) = 9 > 0$
* $\det\left(\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = 9 \cdot 4 = 36 > 0$ ✓

~~Para~~ Para $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ vamos a triangularla con el paso que falta. Hacemos eliminación gaussiana y $F_3 \rightarrow F_3 + \frac{1}{2}F_2$ (nº de filas 3,2).

Como el determinante es invariante en eliminación gaussiana, basta calcular el de la nueva matriz.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 9 \cdot 4 \cdot 1 = 36 > 0.$$

* $\det(M) = \det\left(\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 36$ pues es el mismo paso de eliminación gaussiana de antes.

Entonces, M es definida positiva por la propiedad mencionada. ∎

BIEN!

b) Por el algoritmo para calcular los elementos de L con $A = LL^t$ factorización de Cholesky, sabemos que:

$$\text{Si } i=j: \; l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad \forall 1 \leq j \leq i \leq n. \; (\text{con } A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

$$\text{Si } i>j: \; l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}},$$ → luego de l_{ij} hay ceros pues L es triangular inferior.

Es claro que si A tiene factorización de Cholesky, entonces es SDP, es invertible y por lo tanto los índices de perfil de A están bien definidos (no hay una fila con todos ceros).

Como además todas las submatrices principales de A tienen determinante positivo, son invertibles y no puede haber una fila de A con todos ceros hasta la diagonal. Es decir, $m(A,i) \leq i \; \forall 1 \leq i \leq n$.

Lo que haremos será ver que, $\forall 1 \leq k < i$, si $m(A,i) > k$ entonces $m(L,i) > k$ con un razonamiento inductivo.

SIGUE.

El caso base es ver que $m(A,i)>1 \Rightarrow m(L,i)>1$. Es claro por lo visto antes que es necesario $i>1$. (pues L es triangular inferior, luego de la diagonal hacia arriba)

Supongamos que $a_{i1}=0$, luego $l_{i1}=\frac{a_{i1}}{l_{11}}=0$. Notemos que l_{11} no puede ser cero pues L es triangular inferior e invertible, luego los elementos de su diagonal son no nulos.

Ahora, supongamos que $m(A,i)>k$ para algún $1<k<i$, luego es claro que $m(A,i)>k-1$ y por hipótesis inductiva, $m(L,i)>k-1$. Es decir que:

* $a_{i1},\dots,a_{ik}=0$ y * $l_{i1},\dots,l_{ik-1}=0$. son todos cero.

Luego $l_{ik}=\dfrac{a_{ik}-\sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}l_{kr}}{l_{kk}}=\dfrac{0}{l_{kk}}=0$ pues todos los sumandos son cero.

Entonces $m(L,i)>k-1$ y $l_{ik}=0 \Rightarrow m(L,i)>k$.

Con lo que podemos saber que $m(L,i)\geq m(A,i)$.

Ahora, hay que ver que si $t=m(A,i)$, entonces $t=m(L,i)$.

$t=m(A,i)\Rightarrow m(A,i)>t-1 \underset{\text{lo probado antes}}{\Rightarrow} m(L,i)>t-1$ y vale: $a_{i1}=\dots=a_{it-1}=0$, $l_{i1}=\dots=l_{it-1}=0$, $a_{it}\neq 0$.

En ambos casos calculamos l_{it}:

Si $i=t$: $l_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}=\sqrt{a_{ii}}\neq 0$ pues $a_{ii}=a_{it}\neq 0$ y $l_{i1},\dots,l_{it-1}=0$.

Si $i>t$: $l_{it}=\dfrac{a_{it}-\sum_{k=1}^{t-1} l_{ik}l_{tk}}{l_{tt}}=\dfrac{a_{it}}{l_{tt}}\neq 0$ pues l_{tt} no puede ser cero y $a_{it}\neq 0$, además que $l_{i1},\dots,l_{it-1}$ son 0.

PERFECTO!

Luego $t=m(A,i)=m(L,i)$ y estamos. ◻

03/05/2023

HOJA 4

4) Por definición U es ortogonal $\Leftrightarrow U^tU = UU^t = I$. Luego, como $U = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ y $U^t = \begin{bmatrix} A^t & 0 \\ B^t & C^t \end{bmatrix}$

Tenemos $UU^t = \begin{bmatrix} AA^t + BB^t & BC^t \\ CB^t & CC^t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$,

$$U^tU = \begin{bmatrix} A^tA & A^tB \\ B^tA & B^tB + C^tC \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

donde hacemos multiplicación por bloques, están todos bien definidos en este caso.

Pero son $I_{n+m} = U^tU = UU^t$, de donde $I_n = A^tA$ y $I_m = CC^t$ pues los bloques deben ser $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$

Luego, A y C son ortogonales.

Volviendo a $U = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, si A, C son ortogonales y U también, usamos la propiedad vista en la teórica que nos dice que si M es ortogonal, $\forall 1 \leq i \leq n$, $\|col_i(Q)\|_2 = \|f_i(Q)\|_2 = 1$.

~~Como $col_i(U) = \begin{pmatrix} col_i(A) \\ 0 \end{pmatrix}$~~

Como $f_i(U) = (f_i(A)\ f_i(B))$ y vale: $1 = \|f_i(U)\|_2^2$

con $1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow 1 = (u_{i1}^2 + \dots + u_{in}^2) + (u_{i\,n+1}^2 + \dots + u_{i\,n+m}^2)$

$= a_{i1}^2 + \dots + a_{in}^2 + b_{i1}^2 + \dots + b_{im}^2$

$= \|f_i(A)\|_2^2 + \|f_i(B)\|_2^2$

(A ortogonal) $= 1 + \|f_i(B)\|_2^2 \Rightarrow \|f_i(B)\|_2^2 = 0 \Rightarrow f_i(B) = 0$ y como vale $\forall 1 \leq i \leq n$,

se concluye que $B = 0$.

b) Como ahora sabemos $U = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, si $A = Q_AR_A$, $C = Q_CR_C$ son las factorizaciones QR de A, C respectivamente, si tomamos $Q = \begin{bmatrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_C \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} R_A & * \\ 0 & R_C \end{bmatrix}$ se verifica que

Q es ortogonal pues Q_A, Q_C son ortogonales y las bases ortonormales correspondientes a Q_A, Q_C en $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ respectivamente inducen una en $\mathbb{R}^{n+m}$, correspondiente a Q y R es triangular superior (pues R_A, R_C lo son).

SIGUE.

Se verifica que $QR = \begin{pmatrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_A & 0 \\ 0 & R_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_A R_A & 0 \\ 0 & Q_C R_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = U$ y estamos. ¿$\theta = \arctan\frac{3}{4}$? !

Te faltó B

c) A es una matriz de Givens tal que $A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo visto en la teórica, es $A = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ ✓

C rota en sentido antihorario un ángulo recto, es decir con $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $C = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

Luego U queda determinada por: $U = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y para triangularla debemos usar reflexiones de Householder con los elementos marcados. ✓

~~Necesitamos H_1 tal que $H_1\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pues $1 = \|\ldots\|$.~~

Primero conseguimos la reflexión H tal que ~~...~~ elimine el 1 de la fila ~~...~~ 4, pues como la submatriz de 2x2 de arriba a la derecha son ceros no se ve modificada por la otra reflexión.

Busco H de Householder tal que $H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo visto en clase, si $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

es $H = I - 2uu^t$ con $u = \frac{x-y}{\|x-y\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H = I - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1) = I - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una reflexión.

¡Ojo! Se lo aplicaste a la columna 1, no la 3!

Para la otra, buscamos H' tal que $H'\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pues $1 = \left\|\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_2$.

$\Rightarrow u = x - y = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H' = I - 2\frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} -1/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{2}(-1/5, -3/5, 0, 0) = I - \frac{25}{2}\begin{pmatrix} 1/25 & -3/25 & 0 & 0 \\ -3/25 & 9/25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\|u\|\ \frac{1}{25} + \frac{9}{25} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow H' = I - \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & 9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 7/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es la otra reflexión.

↳ Hay algo mal pues no me queda H' ortogonal, pero no hay más tiempo.

Tranqui, error para de cuentas. Lo que hiciste vale.

24/28